Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur-ID:

Lösungsvorschlag

Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dennis Hofheinz

16. März 2017

Klausur Algorithmen I

Aufgabe 1.	Kleinaufgaben	13 Punkte
Aufgabe 2.	Binäre Heaps	11 Punkte
Aufgabe 3.	Minimale Spannbäume	13 Punkte
Aufgabe 4.	Kürzeste Wege	12 Punkte
Aufgabe 5.	Dynamische Programmierung	11 Punkte

Bitte beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und Ihrer Klausur-ID oben links auf dem Deckblatt an.
- Merken Sie sich Ihre Klausur-ID und schreiben Sie auf **alle Blätter** der Klausur und Zusatzblätter Ihre Klausur-ID und Ihren Namen.
- Die Klausur enthält 19 Blätter. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die durch Übungsblätter gewonnenen Bonuspunkte werden erst nach Erreichen der Bestehensgrenze hinzugezählt. Die Anzahl der Bonuspunkte entscheidet nicht über das Bestehen der Klausur.
- Als Hilfsmittel ist ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4 Blatt zugelassen.
- Bitte kennzeichnen Sie deutlich, welche Lösung gewertet werden soll. Bei mehreren angegebenen Möglichkeiten wird jeweils die schlechteste Alternative gewertet.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
max. Punkte	13	11	13	12	11	60
Punkte						

Bonuspunkte:	Summe:	**Note:**

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Kleinaufgaben [13 Punkte]

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben.

a. Ist die Höhe eines (a,b)-Baumes mit n Einträgen immer in $O(\log n)$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (Es gelte $b \geq 2a-1$ und $a \geq 2$.) [1 Punkt]

Lösung

Ja! Da jeder innere Knoten mindestens a Kinder hat, sind n Blätter spätestens nach $\log_a(n)$ Ebenen erreicht.

b. Geben Sie die Kreis-Eigenschaft, die zur Berechnung minimaler Spannbäume genutzt wurde, wieder. Sie dürfen davon ausgehen, dass alle Kantengewichte paarweise verschieden sind. [1 Punkt]

Lösung

Sei C ein Kreis in einem Graphen G. Dann existiert ein minimaler Spannbaum von G, so dass die schwerste Kante in C nicht in diesem Spannbaum enthalten ist.

c. Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil von Hashtabellen mit verketteten Listen gegenüber Hashtabellen mit linearer Suche. [1 Punkt]

Lösung

Vorteile: Keine Platzbeschränkung, Einfügen in $O(1)$
Nachteile: Verkettete Listen erzeugen Speicher-Overhead, Elemente liegen im Speicher verstreut, Cache-ineffizient

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 1

d. Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil von doppelt verketteten Listen gegenüber einfach verketteten Listen. [1 Punkt]

Lösung

Vorteile: Zugriff auf Vorgängerelement möglich, dadurch direktes Löschen eines Elements möglich (ohne das Vorgängerelement gegeben bekommen zu müssen)
Nachteile: Höherer Speicheraufwand durch mehr Zeiger, höherer Zeitaufwand von Änderungen, da mehr Zeiger geändert werden müssen

e. Welche Eigenschaften machen einen Graphen zu einem DAG? [1 Punkt]

Lösung

DAG steht für „Directed Acyclic Graph“, ein DAG muss also ein gerichteter Graph sein, der keine Kreise enthalten darf.

f. Beweisen oder widerlegen Sie: $(\log_{10} n)^n \in \mathrm{O}\left(n^{\log_2 n}\right)$. [2 Punkte]

Lösung

Es gilt

$$\log_2((\log_{10} n)^n) = n \log_2(\log_{10} n)$$

und

$$\log_2(n^{\log_2 n}) = (\log_2 n)^2.$$

Da $n \notin \mathrm{O}\left((\log_2 n)^2\right)$ und für alle $n \geq 100$ außerdem $\log(\log_{10} n) \geq 1$ gilt, folgt insgesamt

$$n \log_2(\log_{10} n) \notin \mathrm{O}\left((\log_2 n)^2\right)$$

und damit (da $\log_2$ monoton wachsend) auch

$$(\log_{10} n)^n \notin \mathrm{O}\left(n^{\log_2 n}\right).$$

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 1

g. Ist die folgende Aussage korrekt? „Die Laufzeit von Dijkstras Algorithmus liegt für alle in der Vorlesung genannten Implementierungen im Worst Case in $\Omega((m+n)\log n)$“, wobei m die Anzahl der Kanten und n die Anzahl der Knoten des Graphs sei. Falls ja, begründen Sie kurz. Falls nein, geben Sie die verbesserte Laufzeit an und benennen Sie, wie diese erreicht werden kann. [1 Punkt]

Lösung

Die Aussage ist nicht korrekt. Die Laufzeit von Dijkstras Algorithmus liegt für die Implementierung mit Fibonacci-Heaps in $O(m+n\log n)$.

h. Sortieren Sie diese Folge mittels der Array-Implementierung von K-Sort (*KSortArray*) aus der Vorlesung aufsteigend: $\langle 5,2,9,3,5,1,8,2,0,10\rangle$. Es sei $K=8$, und der Schlüssel eines Elements sei der Rest bei der Division durch 8, d.h. $key(x) = x \mod 8$.
Geben Sie den Inhalt des Arrays c (des Hilfsarrays) an, unmittelbar *bevor* die ersten Elemente ins Ausgabearray geschrieben werden. Geben Sie weiterhin den Inhalt des Arrays b (des Ausgabearrays) und des Arrays c an, nachdem der Algorithmus beendet ist. [3 Punkte]

Lösung

Hilfsarray c unmittelbar bevor ins Ausgabearray geschrieben wird:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	5	8	9	9	11	11

Hilfsarray c nachdem der Algorithmus beendet ist:

0	1	2	3	4	5	6	7
3	5	8	9	9	11	11	11

Ausgabearray b nachdem der Algorithmus beendet ist:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	0	9	1	2	2	10	3	5	5

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 1

i. Gegeben sei die folgende Rekurrenz:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 4T(\frac{n}{2}) + n^2 & \text{für } n > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$T(n) = n^2(\log_2(n) + 1)$$

gilt, falls $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Es gilt $\log_2(2) = 1$. [2 Punkte]

Lösung

Induktionsanfang: Es gilt $T(1) = 1 = 1(0+1) = 1^2(\log_2 2 + 1)$.
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n = 2^k$ gelte $T(n) = n^2(\log_2 n + 1)$.
Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned} T(2n) &= 4T(\frac{2n}{2}) + (2n)^2 \\ &\overset{\text{IV}}{=} 4(n^2(\log_2 n + 1)) + (2n)^2 \\ &= (2n)^2(\log_2 n + 1 + 1) \\ &= (2n)^2(\log_2 n + \log_2 2 + 1) \\ &= (2n)^2(\log_2(2n) + 1) \end{aligned}$$

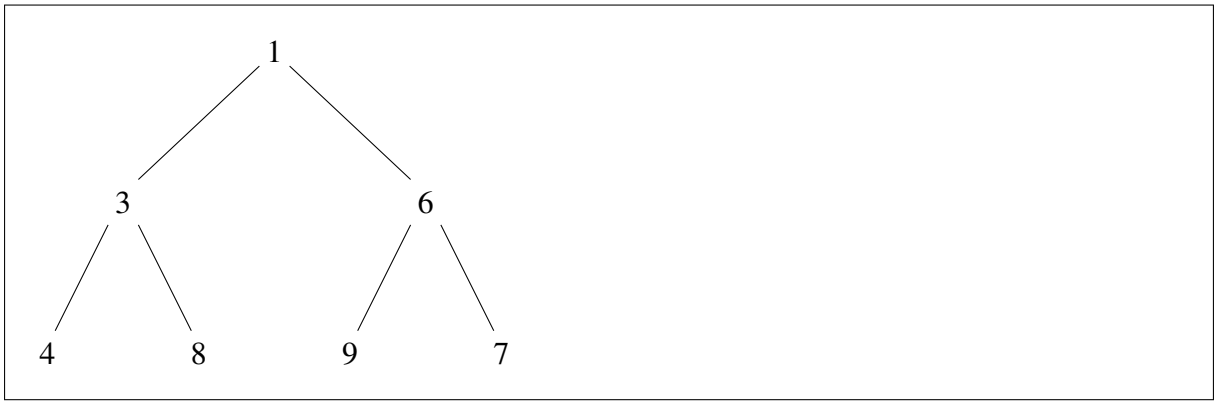
Lösungsvorschlag

Aufgabe 2. Binäre Heaps [11 Punkte]

Hinweis: In dieser Aufgabe handelt es sich bei Heaps stets um Min-Heaps.
a. Gegeben sei folgender binärer Heap im impliziter Darstellung. Zeichnen Sie den Heap in Baumdarstellung. [1 Punkt]

1	3	6	4	8	9	7

Lösung



b. Sei $A[1 \ldots n]$ ein Array, das einen impliziten binären Heap darstellt. Nennen Sie die Heap-Eigenschaft bezüglich A. [1 Punkt]

Lösung

$\forall i > 1 : A[\lfloor i/2 \rfloor] \leq A[i]$

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 2

c. Führen Sie auf folgendem Array die Methode *buildHeapBackwards* aus der Vorlesung aus um einen binären Heap aufzubauen. Geben Sie dabei den Array nach jeder Veränderung an. Einträge, die sich nicht verändern, dürfen Sie dabei leer lassen. In diesem Fall werten wir die letzte Zahl, die in der Spalte darüber vorkommt. [2 Punkte]

Lösung

9	7	**3**	1	8	**5**	6
9	**1**	3	**7**	8	5	6
1	**9**	3	7	8	5	6
1	**7**	3	**9**	8	5	6

d. Führen Sie auf folgendem binärem Heap die Methode *deleteMin* aus der Vorlesung aus. Geben Sie dabei das Array nach jeder Veränderung an. Einträge, die sich nicht verändern, dürfen Sie dabei leer lassen. In diesem Fall werten wir die letzte Zahl, die in der Spalte darüber vorkommt. [2 Punkte]

Lösung

12	3	5	4	9	6	7	8	11
3	**12**	5	4	9	6	7	8	11
3	**4**	5	**12**	9	6	7	8	11
3	4	5	**8**	9	6	7	**12**	11

e. Führen Sie auf folgendem binärem Heap die Methode *insert*(1) aus der Vorlesung aus um die Zahl 1 in den Heap einzufügen. Geben Sie dabei das Array nach jeder Veränderung an. Einträge, die sich nicht verändern, dürfen Sie dabei leer lassen. In diesem Fall werten wir die letzte Zahl, die in der Spalte darüber vorkommt. [2 Punkte]

Lösung

2	3	7	4	6	10	9	5	8	11	13	**1**
2	3	7	4	6	**1**	9	5	8	11	13	**10**
2	3	**1**	4	6	**7**	9	5	8	11	13	10
1	3	**2**	4	6	7	9	5	8	11	13	10

f. Nennen Sie einen Vorteil von Heapsort gegenüber Mergesort und einen Vorteil von Mergesort gegenüber Heapsort. [1 Punkt]

Lösung

Heapsort ist inplace, Mergesort ist stabil.

g. Sie möchten aus dem Algorithmus Heapsort aus der Vorlesung nun einen stabilen Sortieralgorithmus konstruieren. Erläutern Sie, was einen stabilen Sortieralgorithmus auszeichnet und wie Heapsort derart abgewandelt werden kann, dass ein stabiler Sortieralgorithmus entsteht. Hierbei soll die grundsätzliche Funktionsweise und Laufzeit von Heapsort erhalten bleiben, Ihr Algorithmus darf aber $O(n)$ zusätzlichen Speicherplatz verwenden, wobei n die Eingabegröße bezeichnet. [2 Punkte]

Lösung

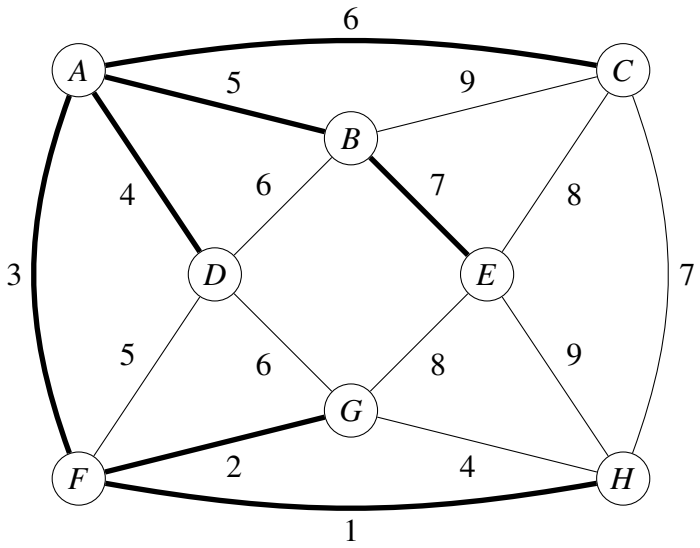
Bei einem stabilen Sortieralgorithmus behalten gleiche Elemente die Reihenfolge bei. Gegeben ein Eingabearray $A[1...n]$, bildet der neue Algorithmus zunächst für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ das Element $A[i]$ auf das Tupel $(A[i],i)$ ab (das geht offensichtlich in $O(n)$, indem man das Array durchgeht). Nun verwendet der Algorithmus Heapsort, um die Tupel lexikographisch zu sortieren. Am Ende gibt der Algorithmus jeweils den ersten Eintrag jedes Tupels in der sortierten Reihenfolge zurück.

Lösungsvorschlag

Aufgabe 3. Minimale Spannbäume [13 Punkte]

a. Führen Sie den Algorithmus von Kruskal an folgendem Graphen aus. Geben Sie die Kanten in der Reihenfolge an, in der Sie vom Algorithmus ausgewählt werden. Geben Sie die Kante zwischen Knoten u und v dabei als $\{u,v\}$ oder (u,v) an. [2 Punkte]

Lösung



Kantenreihenfolge: $\{F,H\},\{F,G\},\{A,F\},\{A,D\},\{A,B\},\{A,C\},\{B,E\}$

b. Welche beiden Beschleunigungstechniken wurden in der Vorlesung für die Union-Find-Datenstruktur eingeführt? Nennen und beschreiben Sie diese kurz. [2 Punkte]

Lösung

Pfadkompression In jedem *find()* wird der Parent-Pointer aller betrachteten Element auf den gefundenen Repräsentatanten gesetzt. So muss bei zukünftigen Anfragen, die diese Elemente beinhalten, nicht wieder der komplette Pfad bis zum Repräsentanten abgelaufen werden.

Union by Rank Für alle Elemente wird die Höhe des am jeweiligen Element beginnenden Teilbaums gespeichert. Bei jedem *link()* von zwei Bäumen wird der kleinere Baum ein Kind der Wurzel des größeren Baumes. Bei Gleichheit ist diese Reihenfolge beliebig. In diesem Fall muss die gespeicherten Tiefen der neuen Wurzel aktualisiert werden.

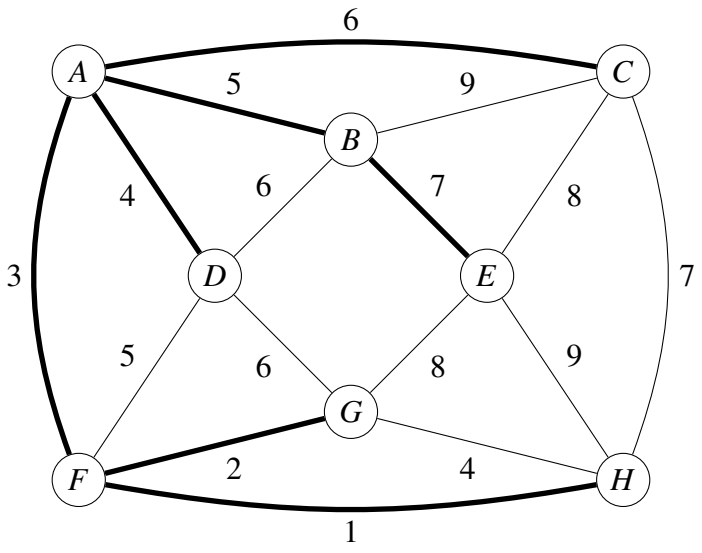
Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 3

Gegeben sei nun ein Algorithmus, der wie folgt einen Spannbaum eines gewichteten ungerichteten Graphen berechnet. Der Algorithmus bekommt dabei nicht sofort Zugriff auf alle Knoten, sondern bekommt nach und nach Knoten und die zugehörigen Kanten gegeben, die den neuen Knoten mit dem bisherigen Teilgraphen verbinden. Die Knoten werden so nacheinander gegeben, dass stets mindestens eine Kante zwischen dem neuen Knoten und dem bisherigen Teilgraphen existiert. Sobald der Algorithmus einen neuen Knoten bekommt, wählt er von allen Kanten, die den neuen Knoten mit dem bisherigen Teilgraphen verbinden, diejenige mit dem geringsten Gewicht aus und fügt sie dem aktuellen Spannbaum hinzu.

c. Führen Sie den Algorithmus an folgendem Graphen aus. Die Knoten werden dem Algorithmus dabei in alphabetischer Reihenfolge (beginnend bei Knoten A) gegeben. Beachten Sie, dass der Algorithmus jeweils nur Kanten betrachtet, die den neuen Knoten mit dem bisherigen Teilgraphen verbindet. Geben Sie die Kanten in der Reihenfolge an, in der Sie vom Algorithmus ausgewählt werden. Geben Sie die Kante zwischen Knoten u und v dabei als $\{u,v\}$ oder (u,v) an. [2 Punkte]

Lösung



Kantenreihenfolge: $\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,E\},\{A,F\},\{F,G\},\{F,H\}$

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

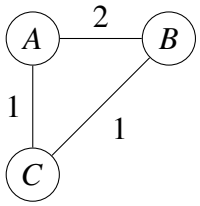
(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 3

d. Geben Sie einen Graphen mit Reihenfolge der Knoten an, so dass der Algorithmus keinen minimalen Spannbaum berechnet. [2 Punkte]

Lösung



Die Knoten werden in der Reihenfolge A, B, C betrachtet. Damit berechnet der beschriebene Algorithmus den Spannbaum bestehend aus $\{A, B\}$ und $\{A, C\}$ (oder $\{B, C\}$) mit Gewicht 3. Der minimale Spannbaum (bestehend aus $\{A, C\}$ und $\{B, C\}$ hat aber nur Gewicht 2.

e. Nach der Vorlesung kann die minimale Kante eines Schnittes jeweils für einen minimalen Spannbaum verwendet werden. Der Algorithmus wählt stets die kleinste Kante aus dem Schnitt zwischen dem neu hinzuzufügenden Knoten und dem bisherigen Teilgraphen aus. Warum impliziert dies nicht, dass der Algorithmus immer einen MST berechnet? [2 Punkte]

Lösung

Für die Schnitteigenschaft ist es wichtig, dass die ausgewählte Kante eine leichteste Kante auf einem Schnitt durch den *gesamten* Graphen ist. Die hier betrachteten Schnitte bestehen aber nur zwischen dem neu ausgewählten Knoten und dem schon betrachteten Teilgraphen; es bleiben also Knoten und Kanten außen vor. Daher ist die Schnitteigenschaft hier nicht anwendbar.

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Fortsetzung von Aufgabe 3

f. Gibt es für jeden beliebigen gewichteten ungerichteten Graphen eine Reihenfolge der Knoten, so dass der Algorithmus den minimalen Spannbaum berechnet? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie gegebenfalls an, wie man die Reihenfolge der Knoten bestimmen kann. Beachten Sie, dass dem Algorithmus stets nur Knoten gegeben werden können, die durch eine Kante mit dem alten Teilgraph verbunden sind. Sie dürfen davon ausgehen, dass alle Kantengewichte paarweise verschieden sind. [3 Punkte]

Lösung

Ja, diese Reihenfolge gibt es für jeden Graphen. Eine Möglichkeit ist, die Knoten in der Reihenfolge zu betrachten, in der sie vom Jarnik-Prim-Algorithmus zum Spannbaum hinzugefügt werden. In diesem Fall wählt unser Algorithmus in jedem Schritt dieselbe Kante, die auch der Algorithmus von Jarnik-Prim wählen würde: Sei die von Jarnik-Prim gewählte Kante $\{u,v\}$, und sei u bereits Teil des Spannbaums. Dann ist $\{u,v\}$ die (eindeutige) leichteste Kante auf dem Schnitt zwischen dem bereits berechneten Spannbaum und dem Rest des Graphen, also insbesondere auch auf dem Schnitt zwischen dem schon berechneten Spannbaum und v. Wählen wir v als nächsten Knoten, so wird unser Algorithmus also auch $\{u,v\}$ zum MST hinzufügen. Somit nimmt unser Algorithmus in jedem Schritt dieselbe Kante zum MST hinzu wie eine Ausführung von Jarnik-Prim und es ergibt sich ein gültiger MST.

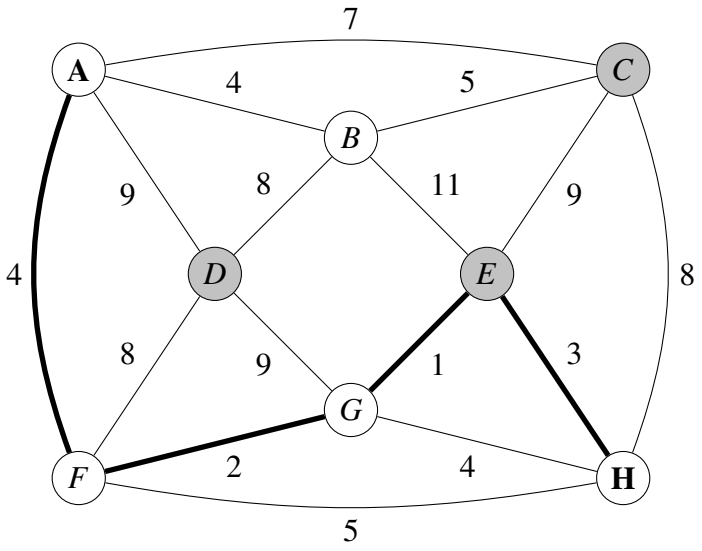
Lösungsvorschlag

Aufgabe 4. Kürzeste Wege [12 Punkte]

Ein Paketunternehmen, das sich auf Haus-zu-Haus-Paketzustellung spezialisiert hat, möchte die Auslieferung optimieren. Bei Abholung eines Paketes vom Starthaushalt bringt der Paketdienst das Paket zunächst zu einem Paketzentrum. Von dort bringt ein Zulieferer das Paket zum gewünschten Zielhaushalt. Dabei soll der Weg insgesamt minimiert werden. Es ist also jeweils ein kürzester Weg vom Start zum Ziel gesucht, der über mindestens ein Paketzentrum verläuft. Der Weg darf dabei sowohl über mehrere Paketzentren, als auch über andere Haushalte laufen. Dieses Problem sei wie folgt durch einen Graphen modelliert. Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter ungerichteter Graph mit $n = |V|$ Knoten. Sei $P \subseteq V$ die Menge der $k = |P|$ Paketzentren, und die übrigen $V \setminus P$ Knoten die Menge der $n - k$ Haushalte. Weiter gebe es für zwei Knoten $u, v \in V$ genau dann eine Kante $\{u, v\} \in E$ mit Gewicht c, wenn der Paketbote über einen Weg der Länge c direkt von u nach v (und v nach u) fahren kann.

a. Gegeben sei folgender Graph. Hierbei sei $P = \{C, D, E\}$ (im Graphen grau markiert) die Menge der $k = 3$ Paketzentren. Geben Sie einen kürzesten Weg von **A** nach **H** an, der über mindestens ein Paketzentrum verläuft. Markieren Sie den Weg entweder *eindeutig erkennbar* im Graphen, oder geben Sie die Knotenreihenfolge an. (Sobald Sie in irgendeiner Art und Weise eine Kante markiert haben, die nicht zum Pfad gehört, geben Sie bitte die Knotenreihenfolge an.) [2 Punkte]

Lösung



Knotenreihenfolge: A, F, G, E, H

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 4

b. Geben Sie nun für eine allgemeine Menge P von Paketzentren einen Algorithmus an, der für ein Knotenpaar $\{u,v\}$ einen Pfad findet, der über mindestens eines der $k = |P|$ Paketzentren verläuft. Ihr Algorithmus soll dabei in zwei Phasen vorgehen: In der *Vorberechnungsphase* darf Ihr Algorithmus (innerhalb der vorgegebenen Zeit- und Platzschranken) Daten vorberechnen. In dieser Phase ist dem Algorithmus der Graph bekannt, **nicht aber die später folgenden Anfragen**. In der auf die Vorberechnungsphase folgende *Anfragephase* bekommt Ihr Algorithmus dann eine Reihe von Anfragen, d.h. von Knotenpaaren $\{u,v\}$ und muss (wieder innerhalb der unten gegebenen Schranken) einen Pfad zwischen beiden Knoten finden. Die Nebenbedingungen für die beiden Phasen lauten:

- In der **Vorberechnungsphase** darf Ihr Algorithmus maximal $O(|P|(|V|+|E|)\log(|V|))$ Zeit und maximal $O(|P|\cdot|V|)$ zusätzlichen Speicher verwenden. *Erinnerung:* In dieser Phase sind die Paare $\{u,v\}$, die später angefragt werden, noch nicht bekannt!
- In der **Anfragephase** muss Ihr Algorithmus dann für jedes angefragte Paar $\{u,v\}$ in Zeit $O(|P|+|V|)$ einen kürzesten Weg von u nach v ausgeben, der über mindestens ein Paketzentrum verläuft.

Geben Sie einen solchen Algorithmus *in Pseudocode* an. (Für informelle Lösungen können gegebenenfalls noch Teilpunkte vergeben werden.)
Für Ihren Algorithmus dürfen Sie davon ausgehen, dass der Graph als Adjazenzarray A vorliegt. Außerdem bekommen Sie ein weiteres Array P und dessen Länge k gegeben, in dem die Indizes der Knoten gespeichert sind, die die Paketzentren darstellen.

Hinweis: Sie dürfen Algorithmen, die aus der Vorlesung bekannt sind, als Unterroutinen für Ihre Lösung verwenden, ohne deren Implementierung anzugeben. [6 Punkte]

Lösung

Procedure VORBERECHNUNG
$d \leftarrow Array[1\ldots k]$ of $Array[1\ldots n]$ of $Float$
$p \leftarrow Array[1\ldots k]$ of $Array[1\ldots n]$ of $Vertex$
for $i \in \{1\ldots k\}$ **do**
    `// Rufe Dijkstra auf` G `mit Startknoten` $P[i]$ `auf.`
    `// Angenommener Rückgabewert: Das Distanz-Array und das Parent-Array.`
    $d[i], p[i] \leftarrow Dijkstra(G, P[i])$
end

Function ANFRAGE(U,V)

```
// Feststellen, über welches Zentrum geroutet wird
minDist ← ∞
minIndex ← ⊥
for i ∈ {1...k} do
    if d[i][u] + d[i][v] < minDist then
        minDist ← d[i][u] + d[i][v]
        minIndex ← minIndex
    end
end

// Pfad von u zum Zentrum
result ← ⟨⟩
cur ← u
while cur ≠ P[i] do
    result += cur
    cur = p[i][cur]
end
result += P[i]

// Pfad von v zum Zentrum, muss noch umgedreht werden
tmp ← ⟨⟩
cur ← v
while cur ≠ P[i] do
    tmp += cur
    cur = p[i][cur]
end

result += reverse(tmp)
return result
```

(zusätzlicher Platz auf dem nächsten Blatt)

Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 4

c. Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus aus **b.** die geforderte Zeitkomplexität erreicht. [2 Punkte]

Lösung

Vorberechnung Es wird $|P|$ mal Dijkstras Algorithmus ausgeführt. Implementiert man diesen z.B. mit Binären Heaps, so liegt die Komplexität in $O(|P| \cdot ((|V| + |E|) \log |V|))$.

Anfrage Die erste Schleife wird zunächst $|P|$ mal durchlaufen. Jede Iteration läuft in $O(1)$, somit ergibt sich $O(|P|)$. Bei der Pfadentpackung müssen zweimal höchstens alle Knoten betrachtet werden, also $O(|V|)$, insgesamt ergibt sich $O(|P| + |V|)$.

d. Um auch Einbahnstraßen zu berücksichtigen, betrachten wir nun gerichtete Kanten. Genauer sei $G = (V, E)$ ein gewichteter *gerichteter* Graph mit $n = |V|$ Knoten. Weiter gebe es für zwei Knoten $u, v \in V$ genau dann eine Kante $(u, v) \in E$ mit Gewicht c, wenn der Paketbote über einen Weg der Länge c direkt von u nach v fahren kann.
Skizzieren Sie kurz, wie Sie Ihren Algorithmus aus Teilaufgabe **b.** abändern müssen, um das gegebene Problem auf einem gerichteten Graphen zu lösen. Dabei sollen sich die asymptotischen Laufzeitschranken nicht ändern. [2 Punkte]

Lösung

In der Vorberechnung werden nun nicht mehr ein Dijkstra-Baum pro Paketzentrum berechnet, sondern zwei: Einmal $d_{forward}, p_{forward}$ wie bisher, und einmal $d_{backward}, p_{backward}$ im Rückwärtsgraphen, d.h. dem Graphen, in dem gerade alle Kanten umgedreht wurden.
Soll in der Anfragephase dann geprüft werden, wie lang der Weg von u nach v über Paketzentrum i ist, muss $d_{forward}[i][u] + d_{backward}[i][v]$ berechnet werden, die Pfadentpackung läuft analog mit $p_{forward}$ und $p_{backward}$.

Lösungsvorschlag

Aufgabe 5. Dynamische Programmierung [11 Punkte]

Ein Chemiekonzern verwendet eine Reihe von k Chemikalien (die wir mit $1,2,\ldots,k$ durchnummerieren), und Sie kennen deren jeweiligen Bedarf für die nächste Zeit. Der Bedarf an den Chemikalien sei durch den Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ gegeben, wobei der j-te Eintrag b_j dem Bedarf an Chemikalie j entspricht. Sie haben außerdem n Angebote als Vektoren $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ vorliegen mit jeweiligen Preisen $p_i \in \mathbb{N}$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dabei entspricht $a_{i,j}$ der Menge der Chemikalie j im i-ten Angebot und p_i dem Preis des i-ten Angebot (für $j \in \{1,\ldots,k\}$ und $i \in \{1,\ldots,n\}$).
Sie können Angebote nur entweder komplett annehmen oder komplett ablehnen. Ein Angebot kann nur einmal, und nicht beliebig oft angenommen werden. Sie möchten Ihren gesamten Bedarf zu einem möglichst geringen Gesamtpreis decken. Dabei ist es unproblematisch, wenn Sie zu große Mengen einer Chemikalie einkaufen.

a. Der Konzern benötigt 20 Einheiten Sauerstoff, 40 Einheit Wasserstoff, 80 Einheiten Stickstoff, 5 Einheiten Helium und 5 Einheiten Krypton, so dass sich der Bedarf

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 80 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ergibt. Es liegen folgende 5 Angebote vor:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 60 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 30 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \\ 80 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit Preisen $p_1 = 50$, $p_2 = 30$, $p_3 = 40$ $p_4 = 50$ und $p_5 = 100$.

Welche Angebote wählen Sie, um den Preis zu minimieren? Welcher Preis ergibt sich? [2 Punkte]

Lösung

Die zwei inklusions-minimalen Lösungen, die die Anforderungen erfüllen, sind $a_1 + a_2 + a_4$ mit Kosten $p_1 + p_2 + p_4 = 130$ und $a_3 + a_5$ mit Kosten $p_3 + p_5 = 140$. Es werden also die Angebote $1,2$ und 4 gewählt.

Fortsetzung von Aufgabe 5

b. Stellen Sie ein ganzzahliges lineares Programm (ILP) auf, das die Aufgabe allgemein (*nicht* nur für die konkreten Werte aus **a.**) als Minimierungsproblem beschreibt. Geben Sie dazu die benötigten Variablen, die zu minimierende Kostenfunktion und alle erforderlichen Nebenbedingungen an. [3 Punkte]

Lösung

Sei $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, wobei $x_i = 1$ gdw. Angebot i gewählt wird.
Dann ist das ILP:

Minimiere $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

unter der Bedingung $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,j} \geq b_j$ für alle $j \in \{1,\ldots,k\}$.

c. Eine optimale Lösung des Minimierungsproblems lässt sich aus optimalen Lösungen von Teilproblemen zusammensetzen. $P[i,\mathbf{b}]$ bezeichne hierbei den minimalen Preis um den Bedarf $\mathbf{b}$ mit den Angeboten $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_i$ abzudecken. Sollten die gegeben Angebote die geforderten Mengen insgesamt nicht erfüllen können, soll der Preis ∞ entsprechen. Geben Sie die Rekurrenz und den Basisfall für die Lösung des Minimierungsproblems auf diese Art und Weise an. [3 Punkte]

Lösung

- Basisfall für $i = 1$:

$$P[1,\mathbf{b}] = \begin{cases} \infty & \text{falls } b_j > a_{1,j} \text{ für ein } j \in \{1,\ldots,k\} \\ p_1 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Rekurrenz für $i = n,\ldots,2$:

$$P[i,\mathbf{b}] = \min(P[i-1,\mathbf{b}], P[i-1,\mathbf{b}-\mathbf{a_i}] + p_i)$$

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

(weitere Teilaufgaben auf den nächsten Blättern)

Lösungsvorschlag

Fortsetzung von Aufgabe 5

d. Geben Sie nun basierend auf der Rekurrenz aus **c.** ein dynamisches Programm in Pseudocode an, das die Kosten der Optimallösung dieses Problems berechnet. Sollten die gegebenen Angebote die geforderten Mengen insgesamt nicht erfüllen können, soll Ihr Algorithmus ∞ als Kosten zurückgeben. [3 Punkte]

Lösung

Function BERECHNEPREISFUER($i, \mathbf{b}$)

if $i = 1$ **then**
  if $\exists j : b_j > a_{1,j}$ **then**
    return ∞
  else
    return p_1
  end
end
return $\min(\text{BerechnePreisFuer}(i-1, \mathbf{b}), \text{BerechnePreisFuer}(i-1, \mathbf{b} - \mathbf{a_i}) + p_i)$

Function BERECHNEPREIS

return BerechnePreisFuer($n, \mathbf{b}$)